数理解析研究所講究録
第1570巻 2007年 137-144

バナッハ空間における均衡問題と関数の近似列について

東京工業大学・大学院情報理工学研究科
木村泰紀 (Yasunori Kimura)
Department of Mathematical and Computing Sciences
Tokyo Institute of Technology

1 序論

集合 X に対し, その直積 $X \times X$ 上で定義された実数値関数 f が, 任意の $x \in X$ に対して $f(x,x)=0$ をみたすとする. このとき, f に関する均衡問題は, 任意の $y \in X$ に対して

$$f(x,y) \geq 0$$

が成り立つような $x \in X$ を求める問題として定義される.

均衡問題は最小値問題, 鞍点問題, 不動点問題, 非協力ゲームにおけるナッシュ均衡等, 多くの重要な問題を含んでいることとが知られている [3].

均衡問題に対する近似解法としては, Flåm・Antipin [6], Combettes・Hirstoaga [5], Iiduka・Takahashi [7], Tada・Takahashi [10] 等によってさまざまな方法が提案されており, 現在でも活発な研究が進められている. 近似解法においては, とくに均衡問題のリゾルベントと呼ばれる写像が重要な役割を演じている.

一方, 均衡問題で用いられる関数 f の近似列を考えることにより, リゾルベントの収束性を議論する研究も [8] 等において行われており, 今後の発展が期待される.

本稿では均衡問題で扱われる関数 f の近似列を考え, これから生成されるリゾルベントの列がどのような条件のもとで解へ収束するかを考察し, 集合列の収束の概念を用いた十分条件を与えた.

2 準備

本稿で取り扱う空間は常に実 Banach 空間である. 実 Banach 空間 E に対し, その共役空間を E^* であらわす. $x \in E$ のノルムを $\|x\|$ であらわし, $x^* \in E^*$ の x での値を $\langle x, x^* \rangle$ であらわすことにする.

Banach 空間 E の単位球面を $B = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ とする. E が滑らかであるとは, $B \times B \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 上の関数 $g(x, y, t) = (\|x + ty\| - \|x\|)/t$ に対し, 任意の $x, y \in B$ において $\lim_{t \to 0} g(x, y, t)$ が存在することである. また, この極限が $x \in B$ に関して一様に収束するとき, E は Fréchet 微分可能なノルムをもつという.

E の点列 $\{x_n\}$ で $x \in E$ に弱収束し, かつ, $\{\|x_n\|\}$ が $\|x\|$ に収束するものを考える. このような点列に対して $\{x_n\}$ が x に強収束することが導かれるとき, E は Kadec-Klee 条件をみたすという. E^* が Fréchet 微分可能なノルムをもつならば, E は回帰的で狭義凸な Banach 空間で, さらに Kadec-Klee 条件をみたす.

Banach 空間 E における双対写像 J は $x \in E$ に対して

$$Jx = \{x^* \in E^* : \|x\|^2 = \langle x, x^* \rangle = \|x^*\|^2\}$$

で定義される多価写像である. E が滑らかなときは J は一価写像となる. さらに E が回帰的のときは J は全射となり, 狭義凸のときは単射になる. よって, E が回帰的で狭義凸かつ滑らかな Banach 空間のときは, J は全単射な一価写像となる. 詳細は [11] を参照せよ.

回帰的で狭義凸かつ滑らかな Banach 空間 E に対し, $E \times E$ 上の関数 D を, $x, y \in E$ に対して

$$D(x, y) = \|x\|^2 - 2\langle x, Jy \rangle + \|y\|^2$$

で定義する. このとき, D は任意の $x, y \in E$ で $D(x, y) \geq 0$ をみたす. さらに, $y \in E$ と点列 $\{x_n\} \subset E$ に対して, $\{D(x_n, y)\}$ が有界であることと $\{x_n\}$ が有界であることは同値になる. また, D は the three point identity [4] と呼ばれる次の等式をみたすことも知られている: 任意の $x, y, z \in E$ に対して

$$D(z, y) = D(x, y) - D(x, z) + 2\langle x - z, Jy - Jz \rangle$$

が成り立つ.

Banach 空間 E のノルムが弱下半連続であることを用いると, 弱収束点列 $\{x_n\}$ とそのの極限 $x_0 \in E$ に対して不等式

$$D(x_0, y) \le \liminf_{n\to\infty} D(x_n, y)$$

が任意の $y \in E$ に対して成り立つ. また, 定義より, 任意の $y \in E$ に対して $D(\cdot, y)$ は凸関数である. さらに, E の狭義凸性から $D(\cdot, y)$ も狭義凸関数となる.

C を E の空でない閉凸集合とするとき, 任意の $x \in E$ に対して

$$D(y_x, x) = \min_{y\in C} D(y, x)$$

をみたす $y_x \in C$ が唯一存在する. x にこの点を対応させる写像は generalized projection [1] と呼ばれ, $y_x = \Pi_C x$ とあらわされる. とくに E が Hilbert 空間のときには, 任意の $x, y \in E$ に対して $D(x, y) = \|x - y\|^2$ となるので, Π_C は C 上への距離射影と一致することがわかる.

回帰的 Banach 空間 E の集合列を $\{C_n\}$ とする. これに対して E の部分集合 s-$\mathrm{Li}_n C_n$ および w-$\mathrm{Ls}_n C_n$ をそれぞれ

$$\begin{aligned}
\text{s-}\operatorname*{Li}_n C_n &= \{x \in E : \exists\{x_n\},\ x_n \to x,\ x_n \in C_n\ (\forall n \in \mathbb{N})\},\\
\text{w-}\operatorname*{Ls}_n C_n &= \{x \in E : \exists\{x_{i_n}\},\ x_{i_n} \rightharpoonup x,\ x_{i_n} \in C_{i_n}\ (\forall n \in \mathbb{N})\}
\end{aligned}$$

で定義する. ここで $x_n \to x$ は点列 $\{x_n\}$ が x に強収束することを, $x_{i_n} \rightharpoonup x$ は $\{x_n\}$ の部分列 $\{x_{i_n}\}$ が x に弱収束することをそれぞれあらわしている. E の閉集合 C_0 に対して

$$C_0 = \text{s-}\operatorname*{Li}_n C_n = \text{w-}\operatorname*{Ls}_n C_n$$

が成り立つとき, $\{C_n\}$ は C_0 に Mosco 収束する [9] といい,

$$C_0 = \operatorname*{M-lim}_{n\to\infty} C_n$$

とあらわす. 詳細は [2] を参照せよ.

Banach 空間 E とその空でない部分集合 C に対し, 関数 $f : C \times C \to \mathbb{R}$ を考える. 点 $x \in C$ が, 任意の $y \in C$ に対して

$$f(x, y) \ge 0$$

をみたすとき, x は関数 f に関する均衡問題の解であるという. また, 関数 f に関する均衡問題の解の集合を $EP(f)$ であらわす. 均衡問題を考える場合, 関数 f については次のような仮定をすることが多い.

(E1) 任意の $x \in C$ に対して $f(x,x)=0$ が成り立つ;
(E2) 任意の $x,y \in C$ に対して $f(x,y)+f(y,x) \leq 0$ が成り立つ;
(E3) 任意の $x \in C$ に対して $f(x,\cdot) : C \to \mathbb{R}$ は下半連続な凸関数である;
(E4) 任意の $x,y \in C$ に対して $\limsup_{t\downarrow 0} f(ty+(1-t)x,y) \leq f(x,y)$ が成り立つ.

次の定理は, 均衡問題を与える関数のリゾルベントを定義する上で重要な定理である.

定理 (Blum-Oettli [3]). 回帰的 Banach 空間とその空でない閉凸集合 C に対し, 関数 $f : C \times C \to \mathbb{R}$ が上記の (E1), (E2), (E3), (E4) をみたすと仮定する. このとき, 任意の $x^* \in E^*$ に対してある $u_{x^*} \in C$ が存在して, 任意の $y \in C$ に対して

$$0 \leq f(u_{x^*},y) + \frac{1}{2}\|y\|^2 - \frac{1}{2}\|u_{x^*}\|^2 - \langle y - u_{x^*}, x^* \rangle$$

が成り立つ.

この定理において, 空間 E が狭義凸で滑らか場合を考えると, J が全単射な一価写像になることから, 各 $x \in E$ に対して u_{Jx} が存在することがわかる. さらに, E の狭義凸性を用いると u_{Jx} は一意に定まり, さらに, 任意の $y \in C$ に対して

$$0 \leq f(u_{Jx},y) + \langle y - u_{Jx}, Ju_{Jx} - Jx \rangle$$

が成り立つことがわかる [8]. この u_{Jx} を $T_f x$ であらわし, f のリゾルベントという. 詳細は [3] を参照せよ.

3 主定理

本節で述べられる主定理は, 均衡問題の列に対して, 対応するリゾルベントの列が収束するための条件を与える. ここで考える均衡問題の列は, 最初に与えられた均衡問題を近似する列とみなすことができ, リゾルベントの極限が属する集合 C_0 は, もとの均衡問題の解の集合と考えることができる.

定理. E を Kadec-Klee 条件をみたす狭義凸で滑らかな反射的 Banach 空間とし, C を E の空でない閉凸集合とする.$\{r_n\}$ を ∞ に発散する正実数列とし, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n : C \times C \to \mathbb{R}$ を次の条件をみたすものとする.

(E1) 任意の $x \in C$ に対して $f_n(x,x)=0$ が成り立つ;
(E2) 任意の $x,y \in C$ に対して $f_n(x,y)+f_n(y,x) \leq 0$ が成り立つ;

(E3) 任意の $x \in C$ に対して $f_n(x,\cdot): C \to \mathbb{R}$ は下半連続な凸関数である;
(E4) 任意の $x, y \in C$ に対して $\limsup_{t\downarrow 0} f_n(ty+(1-t)x, y) \leq f_n(x,y)$ が成り立つ.

C_0 を C の空でない閉凸集合とし, 以下の条件をみたすと仮定する.

(i) $\{r_n u_n^*\}$ が 0 に強収束するようなある点列 $\{u_n^*\} \subset E^*$ が存在して, $C_0 \subset$ s-$\mathrm{Li}_n\, EP(f_n + g_{u_n^*})$ が成り立つ;
(ii) $\{r_n v_n^*\}$ が有界になるような任意の点列 $\{v_n^*\} \subset E^*$ に対して w-$\mathrm{Ls}_n\, EP(f_n + g_{v_n^*}) \subset C_0$ が成り立つ.

ここで $u^* \in E^*$ に対して $g_{u^*}: C \times C \to \mathbb{R}$ は, $x, y \in C$ に対して

$$g_{u^*} = \langle y - x, u^* \rangle$$

で定義される. このとき, リゾルベントの列 $\{T_{r_n f_n} x\}$ は $\Pi_{C_0} x \in C_0$ に強収束する.

証明. 定理の仮定 (i) よりある点列 $\{u_n^*\} \subset E^*$ が存在して, $\{r_n u_n^*\}$ は 0 に強収束し, かつ $C_0 \subset$ s-$\mathrm{Li}_n\, EP(f_n + g_{u_n^*})$ が成り立つ. よって, 任意の $w \in C_0$ に対して, w に強収束する点列 $\{w_n\} \subset C$ が存在して, $w_n \in EP(f_n + g_{u_n^*})$ を各 $n \in \mathbb{N}$ でみたす. すなわち,

$$f_n(w_n, y) + \langle y - w_n, u_n^* \rangle \geq 0$$

が任意の $y \in C$ で成り立っている. 一方, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n = T_{r_n f_n} x$ とおくと, リゾルベントの定義より

$$r_n f_n(x_n, y) + \langle y - x_n, Jx_n - Jx \rangle \geq 0$$

が任意の $y \in C$ で成り立つ. これらの式を用いて,

$$f_n(w_n, x_n) + \langle x_n - w_n, u_n^* \rangle \geq 0,$$
$$r_n f_n(x_n, w_n) + \langle w_n - x_n, Jx_n - Jx \rangle \geq 0$$

が得られる. したがって,

$$r_n(f_n(x_n, w_n) + f_n(w_n, x_n) + \langle x_n - w_n, u_n^* \rangle) + \langle w_n - x_n, Jx_n - Jx \rangle \geq 0$$

が成り立ち, さらに (E2) より $f_n(x_n, w_n) + f_n(w_n, x_n) \leq 0$ であることから

$$r_n \langle x_n - w_n, u_n^* \rangle + \langle w_n - x_n, Jx_n - Jx \rangle \geq 0,$$

よって, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

(1) $$D(x_n, x) = D(w_n, x) - D(w_n, x_n) + 2\langle w_n - x_n, Jx - Jx_n \rangle$$

$$\begin{aligned}
&\le D(w_n, x) + 2\langle w_n - x_n, Jx - Jx_n\rangle \\
&\le D(w_n, x) + 2r_n \langle x_n - w_n, u_n^*\rangle
\end{aligned}$$

を得る．ここで，$\{x_n\}$ が有界でないと仮定すると，部分列 $\{x_{i_n}\} \subset \{x_n\}$ で，任意の $n \in \mathbb{N}$ で $\|x_{i_n}\| > 0$ であり，かつ $\lim_{n\to\infty} \|x_{i_n}\| = \infty$ をみたすものがとれる．このとき

$$\begin{aligned}
\frac{D(x_{i_n}, x)}{\|x_{i_n}\|} &= \frac{\|x_{i_n}\|^2 - 2\langle x_{i_n}, Jx\rangle + \|x\|^2}{\|x_{i_n}\|} \\
&= \|x_{i_n}\| - 2\left\langle \frac{x_{i_n}}{\|x_{i_n}\|}, Jx\right\rangle + \frac{\|x\|^2}{\|x_{i_n}\|} \\
&= \|x_{i_n}\| - 2\|x\| + \frac{\|x\|^2}{\|x_{i_n}\|}
\end{aligned}$$

であり，さらに

$$\begin{aligned}
\frac{D(w_{i_n}, x) + 2r_{i_n}\langle x_{i_n} - w_n, u_{i_n}^*\rangle}{\|x_{i_n}\|} &= \frac{D(w_{i_n}, x)}{\|x_{i_n}\|} + 2r_{i_n}\left\langle \frac{x_{i_n} - w_n}{\|x_{i_n}\|}, u_{i_n}^*\right\rangle \\
&\le \frac{D(w_{i_n}, x)}{\|x_{i_n}\|} + 2r_{i_n}\left(1 + \frac{\|w_n\|}{\|x_{i_n}\|}\right)\|u_{i_n}^*\|
\end{aligned}$$

であるから，(1) より

$$\|x_{i_n}\| - 2\|x\| + \frac{\|x\|^2}{\|x_{i_n}\|} \le \frac{D(w_{i_n}, x)}{\|x_{i_n}\|} + 2r_{i_n}\left(1 + \frac{\|w_n\|}{\|x_{i_n}\|}\right)\|u_{i_n}^*\|$$

が任意の $n \in \mathbb{N}$ で成り立つ．ところが，この式の左辺は $n \to \infty$ において ∞ に発散するのに対し，右辺は有界である．これは矛盾であり，$\{x_n\}$ が有界であることが示された．ここで，$\{x_{j_n}\}$ を $\{x_n\}$ の弱収束する部分列とし，その極限を $x_0 \in C$ とする．各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_{j_n} = T_{r_{j_n} f_{j_n}} x$ の定義から

$$f_{j_n}(x_{j_n}, y) + \left\langle y - x_{j_n}, \frac{Jx_{j_n} - Jx}{r_{j_n}}\right\rangle \ge 0$$

が任意の $y \in C$ で成り立つ．ここで $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$v_n^* = \frac{Jx_{j_n} - Jx}{r_{j_n}}$$

で点列 $\{v_n^*\} \subset E^*$ を定義とすると，上の不等式より $x_{j_n} \in EP(f_{j_n}, g_{v_{j_n}^*})$ が得られる．さらに，$r_n v_n^* = Jx_n - Jx$ であるから，$\{r_n v_n^*\}$ は有界である．よって，(ii) より $x_0 \in \text{w-Ls}_n\, EP(f_n + g_{v_n^*}) \subset C_0$ が得られる．したがって，(1) を用いて

$$D(x_0, x) \le \liminf_{n\to\infty} D(x_{j_n}, x)$$

$$
\begin{aligned}
&\le \limsup_{n\to\infty} D(x_{j_n}, x) \\
&\le \lim_{n\to\infty} \left(D(w_{j_n}, x) - 2\left\langle w_{j_n} - x_{j_n}, r_{j_n} u^*_{j_n} \right\rangle \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} D(w_{j_n}, x) \\
&= D(w, x).
\end{aligned}
$$

ここで, $w \in C_0$ は任意だったので, $D(x_0, x) = \min_{w\in C_0} D(w, x)$, すなわち,

$$x_0 = \Pi_{C_0} x \in C_0$$

が成り立つ. したがって, $\{x_{j_n}\}$ は $\Pi_{C_0} x$ に弱収束する. さらに, 上の不等式より $D(x_0, x) = \lim_{n\to\infty} D(x_{j_n}, x)$ であることから,

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|x_{j_n}\|^2 &= \lim_{n\to\infty} \left(D(x_{j_n}, x) + 2\langle x_{j_n}, Jx\rangle - \|x\|^2 \right) \\
&= D(x_0, x) + 2\langle x_0, Jx\rangle - \|x\|^2 \\
&= \|x_0\|^2 .
\end{aligned}
$$

よって $\lim_{n\to\infty} \|x_{j_n}\| = \|x_0\|$ も得られる. ここで Kadec-Klee 条件を用いると $\{x_{j_n}\}$ は $x_0 = \Pi_{C_0} x \in C$ に強収束することがわかる. E は反射的であり, 有界点列 $\{x_n\}$ の弱収束部分列 $\{x_{j_n}\}$ がすべて $\Pi_{C_0} x \in C$ に強収束することから, $\{x_n\}$ 自身が $\Pi_{C_0} x \in C$ に強収束することが得られ, 定理は証明された. □

とくに条件 (i) において存在が仮定されている $\{u^*_n\}$ が恒等的に 0 の場合が [8] で得られた結果である.

参考文献

[1] Y. I. Alber, *Metric and generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications*, Theory and applications of nonlinear operators of accretive and monotone type, Dekker, New York, 1996, pp. 15–50.

[2] G. Beer, *Topologies on closed and closed convex sets*, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1993.

[3] E. Blum and W. Oettli, *From optimization and variational inequalities to equilibrium problems*, Math. Student **63** (1994), 123–145.

[4] G. Chen and M. Teboulle, *Convergence analysis of a proximal-like minimization algorithm using Bregman functions*, SIAM J. Optim. **3** (1993), 538–543.

[5] P. L. Combettes and S. A. Hirstoaga, *Equilibrium programming in Hilbert spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **6** (2005), 117–136.

[6] S. D. Flåm and A. S. Antipin, *Equilibrium programming using proximal-like algorithms*, Math. Programming **78** (1997), 29–41.

[7] H. Iiduka and W. Takahashi, *Relations between equations of set-valued operators and equilibrium problems*, Proceedings of the Fourth International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (Okinawa, Japan) (W. Takahashi and T. Tanaka, eds.), Yokohama Publishers, 2007, pp. 163–172.

[8] Y. Kimura, *Equilibrium problems and convergence of resolvents for a sequence of functions*, Proceedings of the International Symposium on Banach and Function Spaces (Kitakyushu, Japan) (M. Kato and L. Maligranda, eds.), to appear.

[9] U. Mosco, *Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities*, Adv. in Math. **3** (1969), 510–585.

[10] A. Tada and W. Takahashi, *Strong convergence theorem for an equilibrium problem and a nonexpansive mapping*, Proceedings of the Fourth International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (Okinawa, Japan) (W. Takahashi and T. Tanaka, eds.), Yokohama Publishers, 2007, pp. 609–617.

[11] W. Takahashi, *Nonlinear functional analysis: fixed point theory and its applications*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.